Varianta 26

Subiectul I.

a) $AC = \sqrt{5}$.

b) 3.

c) $AC = BC = \sqrt{5}$, deci triunghiul ABC este isoscel.

d) $z \in \{-i, i\}$.

e) $a = 0$, $b = 1$.

f) Aria cercului este $S = 4\pi$.

Subiectul II.

1.

a) 0.

b) $a = 1$.

c) 6 funcții injective.

d) $x \in \left\{\frac{1}{9}, 1\right\}$.

e) Probabilitatea căutată este $p = \frac{1}{2}$.

2.

a) $f(f(-2)) = \frac{2}{3}$.

b) Dreapta de ecuație $y = 1$ este asimptota căutată.

c) $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$, $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

d) $f''(x) < 0$, $\forall x > -1$, așadar funcția f este concavă pe $(-1, \infty)$.

e) $\lim\limits_{x \to \infty} \int_0^x f(t)\,dt = +\infty$.

Subiectul III.

a) $\det(A_0) = -1$.

b) $\det(A_0 + xI_3) = x^3 + 2x^2 - x - 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

c) Evident.

d) Avem $c = f_A(0) = \det(A)$.

e) $\det(A + \sqrt{2} \cdot I) = 0 \iff f_A(\sqrt{2}) = 0$ și din **c)** obținem că $f_A(x) = (x^2 - 2) \cdot (x + a)$, cu rădăcina întreagă $x = -a$.

f) Se demonstrează prin reducere la absurd.

g) Avem $\det(A) = f_A(0)$ şi $\det(A + I_3) = f_A(1)$ şi din **c)** ştim că $f_A \in \mathbf{Z}[X]$.
Deoarece $f_A(0)$ şi $f_A(1)$ sunt impare, din **f)** rezultă că f_A nu are rădăcini întregi.
Este evident că în acest caz f_A, care are coeficientul dominant egal cu 1, nu are rădăcini raționale .

Subiectul IV.

a) $\int_{-2}^{2} f_1(x)\,dx = 0$ şi $\int_{-2}^{2} f_2(x)\,dx = -\frac{8}{3}$.

b) $f_3(x) = x^3 - 3x$, pentru $x \in \mathbf{R}$.

c) Evident.

d) Se demonstrează prin inducție, folosind că pentru $k \in \mathbf{N}^*$, $f_k(2\cos x) = 2\cos kx$ şi $f_{k+1}(2\cos x) = 2\cos(k+1)x$ şi demonstrând că $f_{k+2}(2\cos x) = 2\cos(k+2)x$.

e) Pentru $n \in \mathbf{N}^*$, se efectuează în integala din dreapta schimbarea de variabilă $2\cos t = x$.

f) Pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, $f_n(1) \overset{\text{c)}}{=} 2\cos\frac{n\pi}{3}$.
Mai mult, $f_{6k}(1) = 2 \to 2$ şi $f_{6k+1}(1) = 1 \to 1$,
deci şirul $\left(f_n(1)\right)_{n \in \mathbf{N}^*}$ este divergent, având două subşiruri cu limite diferite.

g) Pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, folosind punctele **e)** şi **d)**
$a_n = \int_{-2}^{2} f_n(x)\,dx = \frac{2\left(1 - (-1)^{n+1}\right)}{n+1} + \frac{2\left((-1)^{n-1} - 1\right)}{n-1}$, de unde rezultă că $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
Folosind relația din ipoteză, rezultă concluzia.